

Voronoi 图在移动粒子半隐式法中的应用*

周子棋 孙一颢 孙中国 席光

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为了优化移动粒子半隐式法的空间拓扑关系相关算法, 本文将 Voronoi 图应用于移动粒子半隐式法 (MPS) 中的邻居粒子搜索、表面粒子判定及粒子迁移三个关键环节。通过构建粒子 Voronoi 图并利用其拓扑关系层级进行邻居粒子搜索; 针对表面粒子识别问题, 提出了基于 Voronoi 图单元结构的判别方法; 结合 Lloyd 松弛法与格林-高斯公式, 推导出基于 Voronoi 图的粒子迁移方法。结果表明: 基于 Voronoi 图的粒子搜索相较于传统全配对方法有 159 倍以上效率提升; 基于 Voronoi 图的粒子判断方法较传统数密度方法更准确, 计算效率是几何判别法的 43.3 倍; 基于 Voronoi 图的粒子迁移, 相较于传统粒子迁移方式, 能够有效减小系统扰动, 在保持自由液面的光滑性与无重叠特性的同时也有 6 倍以上的计算效率优势。综上所述, Voronoi 图的良好空间分割特性在移动粒子半隐式法中具有良好的应用前景。

关键词: Voronoi 图; MPS 法; 表面粒子判定; 粒子迁移; 邻近粒子搜索

中图分类号: 文献标志码: AA

文章编号: 0253-987X(XXXX)XX-0001-14

Applications of Voronoi diagram in the Moving particle semi-implicit method

ZHOU Ziqi, SUN Yijie, SUN Zhongguo, XI Guang

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To optimize the algorithms for establishing and analyzing spatial topology in the Moving Particle Semi-implicit (MPS) method, this paper applies the Voronoi diagram to three key components: neighbor particle search, surface particle detection, and particle shifting. The specific approaches are as follows: a particle Voronoi diagram is constructed to facilitate neighbor particle search by leveraging its inherent topological relationships; a novel method based on Voronoi cell structure is proposed to address the challenge of surface particle detection; and a particle shifting scheme derived from the Voronoi diagram is developed by integrating the Lloyd relaxation algorithm with the Green-Gauss formula. The results demonstrate that: the Voronoi-based particle search achieves an efficiency improvement of over 159 times compared to the traditional all-pair search method; the Voronoi-based

收稿日期: 2025-XX-XX。基金项目: 国家资助博士后研究人员计划 (GZB20240596), 陕西省自然科学基金基础研究计划项目一般项目 (2025JC-YBQN-574), 光合基金 A 类 (202407014748)。

surface particle detection is more accurate than the conventional particle number density method and computes 43.3 times faster than the geometric method; furthermore, the Voronoi-based particle shifting effectively reduces system disturbance while preserving the smoothness and non-overlapping characteristics of the free surface, also yielding a computational efficiency advantage exceeding 6 times compared to traditional shifting approaches. In conclusion, the proficient spatial partitioning properties of the Voronoi diagram present promising potential for its application within the MPS framework.

Keywords: Voronoi diagram; MPS; Surface particle detection; Particle shifting; Neighboring particles searching

光滑粒子流体动力学 (SPH)^{[1][2]}和移动粒子半隐式法 (MPS)^{[3][4]}属于拉格朗日无网格粒子方法, 这类方法的计算域被离散为粒子, 这些粒子携带物理量进行移动, 不存在固定的拓扑关系, 粒子之间的作用采用核函数进行建模^[5]。SPH 和 MPS 较为相似^[6], 都具有处理运动边界^[7]、大变形^{[8][9]}、自由面破碎^[10]、非定常计算^{[11][12]}等优势。但是, 由于没有固定的拓扑关系, 每次计算完粒子的运动后都需要重新计算粒子之间的拓扑关系 (即邻居粒子或支持域内粒子) 才能推进下一步计算。因此计算效率是粒子方法的问题之一^[13]; 支持域内粒子由于非定常运动导致分布不均, 因此需要粒子均匀分布的各类算子如梯度、散度、拉普拉斯算子等的误差增加, 计算精度和稳定性随之劣化^[14]; 粒子进行非定常运动, 边界条件也需要实时计算, 尤其是自由面边界则需要每个时间步内重新判定^[15]。

Voronoi 图也称 Voronoi 剖分, 是一种基于空间划分的几何结构, 可以将二维或三维空间划分为互不重叠的子域, 可以高效地描述空间临近关系和局部适

应复杂几何, 从而可以用于复杂几何下的高精度数值计算^{[16][18]}。由于这种特性, 在无网格方法中, Voronoi 图被用于估算粒子所占据的体积大小^[19], 并根据质心松弛算法, 得到均匀的粒子初始布置。在此基础上, 因为其良好的空间分割特性, 也用于在并行计算中进行动态的负载均衡^{[20]-[22]}。另外, 也有学者利用该图的拓扑结构改良 SPH 得到 Voronoi 粒子动力学方法 (Voronoi Particle Hydrodynamic, VPH) 方法^[23], 或是结合 VPH 与 SPH 进行耦合计算^{[24][25]}。

由于 Voronoi 图是基于位置点构建的拓扑关系, 因此, 将粒子方法中的粒子点 (particles) 代替位置点构建对应的 Voronoi 图是十分可行的。在这类拓扑关系下, 很容易可以通过任意 Voronoi 单元来访问其共线 (平分线) 或共面 (平分面) 单元, 这非常有利于开展其局部几何特征的分析。单元的形状和大小是被自身位置点和邻居位置点所定义出来的, 这和粒子方法中邻居粒子关系及其数密度等概念有契合的地方, 因为如 MPS 中, 反应局部粒子疏

密程度的粒子数密度其计算为对邻居粒子进行核函数积分。不同的是, Voronoi 单元仅仅受其本身和其最近邻单元(共线)所影响,因此基于 Voronoi 的局部拓扑分析会比传统 SPH 和 MPS 在支持域范围内进行分析更加紧致,更能反映粒子分布的局部特征。

在 Zhou 等^[26]的工作中,将 Voronoi 图引入到 MPS 与任意欧拉拉格朗日有限体积法的耦合中。分析发现,基于该方法的局部临近拓扑分析,可以帮助粒子类方法改善需要局部粒子分布均匀、粒子类型判断等以上问题,因此本文将从邻居粒子搜索,表面粒子判断以及粒子迁移这三方面进行工作。

1 MPS 方法

移动粒子半隐式法最早由 Koshizuka 和 Oka 教授^[3]提出,该方法是一种典型的拉格朗日无网格方法,基于粒子携带物理量模拟流动过程。通常来说,粒子类无网格方法采用核函数对粒子间相互作用进行建模。在任意流体粒子点,展开支持域,利用支持域内流体粒子的物理变量,计算其一阶和二阶导数,从而完成控制方程的离散和求解。

移动粒子方法假设每个粒子表征流体微团,类似流体质点的概念,基于配点法的思想将流体表征成携带物理量信息的离散粒子,离散粒子概念符合连续介质模型,建立粒子间相互作用模型,采用核函数作为权函数近似得到粒子自身物理量,不可压缩连续方程和动量方

程表示如下

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2)$$

式中: ρ 为流体密度; t 为时间; $\mathbf{u}$ 为流体速度矢量; p 为压力; $\mathbf{f}$ 为体积力; μ 为流体动力粘性系数; ∇^2 为 Laplace 算子; ∇ 为 Hamilton 算子。

核函数(Kernel Function)的概念来源于插值方法中,对离散点大量存在的空间某处进行插值所用函数。对于 SPH 和 MPS 而言,核函数的作用类似,但也明显区别: SPH 模拟的是可压缩流体,而单个粒子的密度由周围粒子的核函数积分所得。而在 MPS 中,核函数仅仅用于计算微分算子和部分插值计算。因此 MPS 的核函数相比 SPH 来说,降低了对核函数的选择要求^[32]。

对于 MPS 方法,核函数通常采用反比例函数形式如:

$$W(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & (r < r_e) \\ 0 & (r \geq r_e) \end{cases}, \quad (3)$$

式中: r 为粒子间距; r_e 为粒子影响半径。在 MPS 方法中,利用核函数计算一阶和二阶导数算子,公式如下

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{\phi_j + \phi_i}{|\vec{r}_{ij}|^2} \vec{r}_{ij} w_{ij}, \quad (4)$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{\lambda n^0} \sum_{j \neq i} (\phi_j - \phi_i) w_{ij}, \quad (5)$$

式中: ϕ 是标量; n^0 是粒子数密度常数,定义为在粒子均匀分布时的 $n_0 =$

$\sum_{j \neq i} W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)$; λ 是近似系数; d 表示维度; w_{ij} 是核函数贡献 $W(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)$.

MPS求解的压力泊松方程如下

$$\nabla^2 p_i^{k+1} = (1 - \gamma) \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}_i^* + \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_0 - n_i^*}{n_0}, \quad (6)$$

式中: $\mathbf{u}_i^*$ 和 n^* 为显式计算后的临时速度和粒子数密度, γ 为混合源项比例, 一般取 0.02。

2 Voronoi 图介绍

Voronoi 图或 Voronoi 剖分由将空间分成凸单元的粒子集生成。在其中, 空间被划分为若干子域, 在这些子域中, 它满足:

$$V_i = \{x: \forall j \neq i, d(x, p_i) \leq d(x, p_j)\}, \quad (7)$$

式中: V_i 表示给定 Voronoi 单元 (即一个子域); $d(x, p_i)$ 表示从任意位置到 Voronoi 位置点的距离。

根据 Voronoi 图的定义, 可以发现其具有一个重要性质: 共边单元的位置点之间连线与该边垂直, 由于这个特性, 其在数值计算中也有重要应用。在数值计算中, Voronoi 图也可以看作是保证凸几何结构的多边形网格划分。

生成 Voronoi 图一般分为直接和间接两类方法: 直接法, 顾名思义即是直接从有限点集中生成 Voronoi 图; 间接法则利用 Voronoi 图和德劳内 (Delaunay) 三角网格的对偶性质, 先生成三角网格, 再计算对偶关系得到 (对偶关系见图 1)。本文采用的是直接方法中的扫描线算法^[27], 其计算时间复

杂度为 $O(N \log N)$ 。

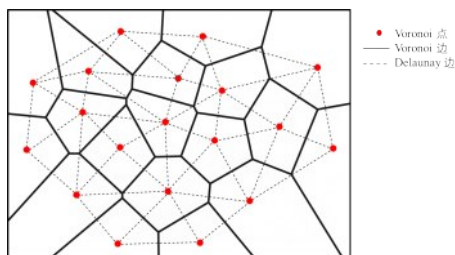


图 1 Voronoi 图示意图

Fig. 1 The demonstration of Voronoi diagram

3 Voronoi 图在 MPS 法中应用

根据 Voronoi 图的性质, 作者团队在之前的工作中开发了 IC-MP-MVM 求解器^[26], 成功地模拟了两相流问题, 论文将 MPS 方法也进行了 Voronoi 划分, 从而和有限体积方法进行了耦合计算。然而, Voronoi 图不仅仅只能进行计算域的拓扑连接, 其本身的一些性质也可以用来优化 MPS 方法的计算。本文提出了以下三个 Voronoi 图的应用方案, 分别为: 基于 Voronoi 的邻居粒子搜索、Voronoi 表面粒子判定以及 Voronoi 粒子迁移技术, 分别对应从方法基础、边界条件以及稳定性方案三个方面。

3.1 邻居粒子搜索

粒子方法如 SPH 和 MPS 等, 多用均匀背景网格、哈希排序等方法来高效建立粒子与粒子之间的拓扑关系 (即邻居粒子列表)。其最优时间复杂度可以是 $O(N)$, 而 Voronoi 图的构造时间复杂度为 $O(N \log N)$, 因此直接采用 Voronoi

图进行邻居粒子搜索并不理想。

由于在 MPS 或者 SPH 方法中引入了 Voronoi 图进行粒子质量估计、粒子松弛、表面粒子判断、粒子迁移等操作均需要每步重新生成图。因此,在生成的过程中,已经付出了相应的计算量进行拓扑关系的构造,故而可以利用已构建的拓扑关系进行邻居粒子搜索,这样则可以省略其他搜索方法来获得较好的计算效率并减少内存占用。

如图2所示,对于红色粒子,其邻居网格可以认为是 L_1 - L_4 四个不同的层级。为更好的说明该方法原理,我们定义对于任意网格,有函数 $NV(L_i)$ 表示获取第 i 层网格的所有邻居网格。对于目标网格自身的第一层邻居网格:

$$L_1 = NV(L_0), \quad (8)$$

故,对于第二层网格有:

$$L_2 = \left(\bigcup_{U \in L_1} NV(L_1) \right) \setminus \left(\bigcup_{i=0}^1 L_i \right), \quad (9)$$

即搜索隶属于 L_1 层网格的所有邻居网格,并从中删去所有隶属于 L_1 本身的网格,从而得到 L_2 层网格集合。

由此可推任意层网格为

$$L_i = \left(\bigcup_{U \in L_{i-1}} NV(L_{i-1}) \right) \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{i-1} L_j \right), \quad (10)$$

在此基础上,执行邻居粒子搜索可以直接访问粒子 i 所在的 Voronoi 单元的 N 层(一般小于3)邻居网格即可得到一个完整的支持域。这部分的计算量主要在于对于指针的重复性比较,和内存寻址,计算开销较小,相比于构造 Voronoi 图来说可以忽略不计。

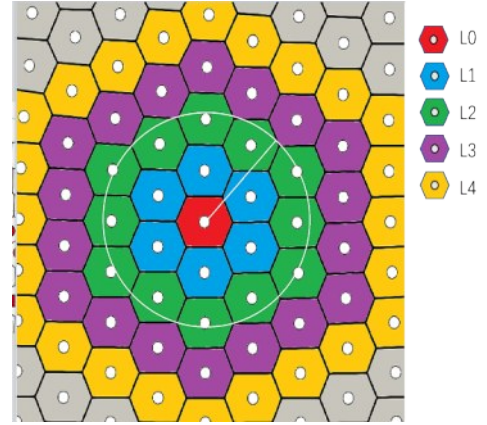


图2 Voronoi 邻居粒子搜索层级示意图

Fig. 2 The schematic map of Voronoi based neighbor particle searching

因此,对于给定支持域,仅仅需要调用其部分层级的邻居网格列表即可得到相应的邻居粒子列表。为保证邻居粒子列表的可靠性,对于 $2.1l_0$ 的支持域,我们通常选用 L_3 及以下的层级网格进行邻居粒子判定。即邻居网格列表为 $\bigcup_{j=1}^3 L_j$ 。

其单核加速效果和并行加速效果如表1和表2所示:

数据表明:相比于传统全配对搜索,加速效果十分明显:在20万粒子数的情况下,仅搜索部分效率提升至403.2倍,如果将 Voronoi 构造包含在内,也有159.01倍的提升。另外,该方法的并行效率也较好,在给定线程区间可以看作是线性效率提升。

本文并未引入并行 Voronoi 图生成技术,因此没有测试包含构造在内的并行加速效果。但据相关文献说明^[34],分

区并行的效率较高，在超过512个分区时的强扩展性可达57%，因此，并行构造

Voronoi 图不会拖累整体计算效率，本方法可以推广至大规模计算。

表 1 单核 Voronoi 搜索用时对比

Table 1 Voronoi searching time cost comparison with single CPU core

粒子数	全配对时间	Voronoi 搜索（仅搜索）时间/ ms		Voronoi 搜索（包含构造）时间/ ms	
	/ms				
50000	250	16	15.62×	47	5.31×
100000	4031	63	63.98×	156	25.84×
200000	106859	265	403.2×	672	159.01×

表 2 Voronoi 搜索并行计算用时

Table 2 Voronoi searching parallel computing time comparison

线程数	全配对法时间/ ms	Voronoi 搜索时间/ ms
1	106859	265
2	66187	131
4	28860	70
8	14094	37

3.2 表面粒子判定

由于 MPS 方法是全拉格朗日方法，自由面直接表示为若干流体粒子。由自由面的性质可知，粒子压力应该保持为零，从而使得计算满足自由面边界条件。与此同时，压力泊松方程组的系数矩阵在自由面粒子上表现为多个零项，简化了该大型稀疏系数矩阵的求解。以上两点为表面粒子判定的意义，准确的表面粒子判定一方面可以准确还原物理过程，另一方面可以避免方程求解存在错误^{[28][29]}。

经典的表面粒子判定方法根据表面粒子位于流体区域的边界上这一性质。由于表面粒子的支持域内只有部分区域

存在粒子，其计算出的粒子数密度将会小于流体内部粒子的所保持的粒子数密度常数 n^0 。利用这一性质，可以构造判别式来区分内部粒子和表面粒子，如下式：

$$\langle n \rangle_i^* < \beta n^0, \quad (11)$$

式中： β 为表面粒子判定常数。根据上文的分析， β 应为一个 0 到 1 之间的常数，本文取 $\beta=0.95$ 。当被判别粒子满足该表达式即被认为是表面粒子。

然而，该判别式的准确性完全取决于 β 的合适取值。由于在 MPS 计算中，流体粒子的剧烈运动导致个别粒子在某一时刻的数密度会满足判别式，导致被误判成表面粒子，从而严重影响了计算的稳定性和压力计算的准确性。对于多相 MPS 计算，由于相界面需要压力插值，误判的内部流体粒子常常会引起巨大的压力振荡，这使得多相 MPS 计算中对于表面粒子判定的要求更为严苛。通常来说，基于几何方法的表面粒子判定更为准确，如 Shibata 的光照法^[31]等。

本文基于 Voronoi 图的单元信息，

计算其形心 s_i 与位置点 p_i 的距离 r_c 为:

$$r_c = |p_i - s_i|. \quad (12)$$

如图3所示,三类粒子的判断依据如下:

1. 内部粒子, 应满足单元封闭和

$$r_c \leq \gamma_{spd} l_0.$$

2. 表面粒子, 应满足单元不封闭或

$$r_c > \gamma_{spd} l_0$$

3. 次表面粒子, 应满足其单元与表面粒子单元相邻。

对于一般情况, γ_{spd} 一般取0.1。

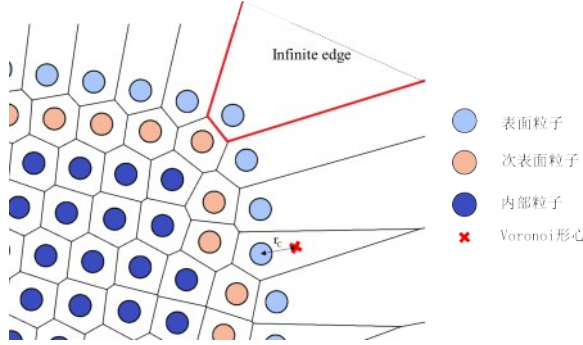


图3 Voronoi表面粒子判定方法

Fig. 3 Voronoi based surface particle detection

新方法的判定效果对比见图4, 其准确性与光照法类似, 优于原始判定方法。在此基础上, 我们对比了光照法和该方法对于单个算例的计算(7200个粒子)用时, 我们取100次计算后的累计时间: 光照法^[31]需要2859 ms, 而Voronoi判别法用时为63ms, 效率大约是光照法的43.3倍。

3.3 粒子迁移

在SPH和MPS中, 常使用粒子迁移(Particle shifting)来提高粒子分布均匀性从而达到恢复算子精度和提高计算稳定性的作用。粒子迁移模型基于菲克第一定律, 将高浓度粒子转移到低浓度粒子区域以达到整体的均匀性。菲克第一定律表示如:

$$J = -D \nabla C, \quad (13)$$

式中: J 为通量; ∇C 为浓度梯度; D 为扩散系数。将其应用到迁移中, 可得

$$\delta \mathbf{r}_i = -C_{\text{shift}} d_0^2 \nabla C_i, \quad (14)$$

式中: $\delta \mathbf{r}_i$ 为目标粒子的位移量。对于某一粒子的浓度 C_i , 可由下式得到:

$$C_i = \frac{1}{n_0} \sum_{j \neq i} w_{ij}. \quad (15)$$

其浓度梯度 ∇C 为:

$$\nabla C_i = \frac{1}{n_0} \sum_{j \neq i} \nabla w_{ij}. \quad (16)$$

在实际计算中, 由于粒子在自由面附近的支持域被截断, 导致粒子在法向量方向具有较大的浓度梯度, 产生远离内部流体的较大位移, 从而影响计算的稳定性。故而, 在此基础上, 针对表面

和次表面粒子等支持域不完整的粒子有修正的迁移公式^[15] (Optimal PS):

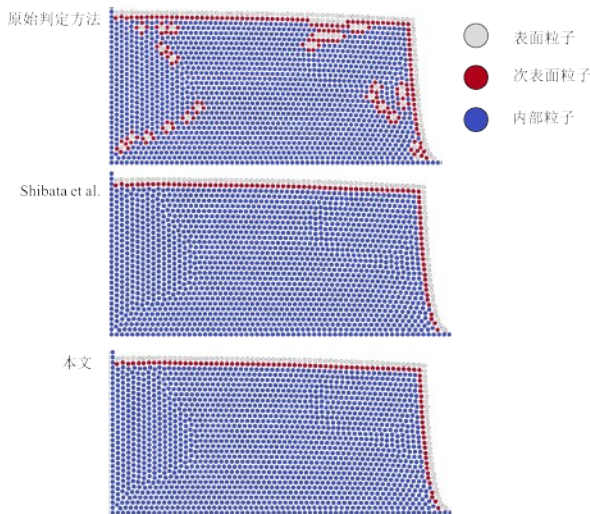


图4 不同表面粒子判定方法对比

Fig. 4 The comparison of different surface particle detection methods

$$\delta \mathbf{r}_i = -C_{\text{shift}} d_0^2 (\mathbf{I} - \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \cdot \nabla C_i, \quad (17)$$

其中, $\mathbf{n}_i$ 为粒子法向量, $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。经过该式修正, 表面粒子和次表面粒子仅在自由面切向存在位移, 故保持了自由面计算的稳定性。

基于菲克定律的浓度梯度粒子迁移方法需要一个相对完整的支持域来得到正确的迁移方向和迁移量大小。矛盾的是: 粒子迁移的目的是改善粒子分布不均, 然而粒子分布不均却又会导致不准确的粒子迁移。在粒子分布不均程度较轻微的时候, 粒子迁移是有效的。当粒子分布较为畸形, 难以保证支持域完整性的时候, 粒子迁移也无法纠正该问题。因此, 我们利用了 Voronoi 自身的性质, 提出了新的粒子迁移方法, 以下称为 Voronoi Particle Shifting (VPS)。

基于该方法我们假定: Voronoi 位置点在质心处时是各向同性的 (即最优粒子分布情况)。由于单元形状仅仅只跟最邻居粒子有关, 因此, Voronoi 单元的形状很大程度上反映了粒子在局部空间的均匀性。将 Voronoi 位置点移动到形心处, 得到的整体单元分布具有较规则的形态^[33], 对于核函数来说, 周围支持域采样点分布也更加规则, 具有较好的各向同性。

参照 PS 的方法, 有

$$\delta \mathbf{r}_i = C_{\text{shift}} (\mathbf{p}_i - \mathbf{s}_i), \quad (18)$$

式中: $\mathbf{p}_i$ 和 $\mathbf{s}_i$ 分别为 Voronoi 的位置点以及形心位置。公式(18)可以看作是在每个时间步执行一次 Lloyd 松弛^[33]。

VPS 对于单个粒子及其支持域来说, 保证了粒子自身处于支持域各向同

性最优的位置。然而对于整体的粒子分布均匀性来说是无法保证的。因此,我们进一步提出了基于局部邻居粒子的粒子迁移方法,以下称为 Neighbored Cells Voronoi Particle Shifting (NCVPS)。同样的,我们借助 Voronoi 单元获得了粒子的局部拓扑关系,因此,利用格林高斯公式,其位置梯度可以是:

$$\nabla \mathbf{r} = \frac{1}{S} \sum_j A_{ij} \mathbf{r}_{ij}, \quad (19)$$

其中, S 为单元对应的面积或体积, A_{ij} 为单元共线长度或面积, $\mathbf{r}_{ij}$ 为邻居单元的相对位置矢量。

在此基础上,辅以特征尺寸(粒子直径 l_0) 和自由参数 C_{shift} (取 0.01) 可得:

$$\partial \mathbf{r} = \frac{C_{shift} l_0}{S} \sum_j A_{ij} \mathbf{r}_{ij}. \quad (20)$$

该方法具有较强的物理含义:首先, NCVPS 是基于精确的几何信息而非 PS 的函数插值得到的;我们通过面 A_{ij} 这个天然权重来估计和网格面积 S 这个内置归一化参数来得到一个反应粒子分布稀疏程度的无量纲值;对于一个分布均匀的局部粒子集合,公式 21 都会得到趋于 0 的值,任何的不均匀性在通过公式 21 计算都会指向一个需要修正的方向。相比于传统的 PS,其优势在于无需完整核函数采样,并且适用区域更加紧致(仅目标粒子和最邻居粒子);相比于 VPS,其优势在于计算量较小(无需形心计算过程),且过程较为平滑,避免了形心位置和粒子本身差

异过大导致的位置跳跃。

同样的,在自由表面时消除法向分量,以稳定自由表面计算问题:

$$\delta \mathbf{r}'_i = \delta \mathbf{r} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i). \quad (21)$$

无论是何种 PS 技术,都需要对新的位置处插值得到新的物理量:

$$\varphi'_i = \varphi_i + \nabla \varphi_i \cdot \delta \mathbf{r}_{ij}, \quad (22)$$

其中, φ_i 和 φ'_i 分别为迁移前后的物理量。

静水算例是一个用于测试算法稳定性和动量守恒性质的经典算例:在 $0.5\text{m} \times 1.0\text{m}$ 的水池有 0.5m 深的水,初始时刻时并不直接赋予压力,相当于 0.5m 高度的水在初始表压为 0 的情况下,通过 MPS 方法计算形成正确的静水压力场。通过统计其所有粒子的总动能,可以分析不同 PS 方法对于整个计算的额外扰动效果。定义总动能为:

$$E_k = \sum_{i \in \text{fluid}} \frac{1}{2} m_i \mathbf{u}_i^2. \quad (23)$$

在经过长时间计算后,总动能 E_k 应尽可能趋于 0。图 5 反映了在到达静水状态时的粒子和压力分布,可以看到,三种方法都具有良好的粒子分布和压力分布。图 6 展示三种方法下总动能的衰减曲线,相比于 OPS 方法, VPS 和 NCVPS 方法都可以使系统总动能降低到更低水平。这说明了 VPS 和 NCVPS 方法在动态稳定过程中对系统的扰动更小。统计了静水压力与精确解的平均误差, OPS 为 1.27%、VPS 为 1.23%、NCVPS 为 1.19%。无论何种 PS 方法,其静水压力误差均较小,没有明

显差距。

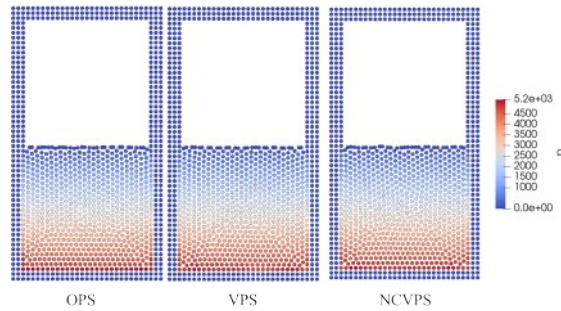


图5 不同粒子迁移方法在静水算例中粒子分布和压力云图对比

Fig. 5 Comparison of particles and pressure distribution for different particle shifting methods in hydrostatic cases

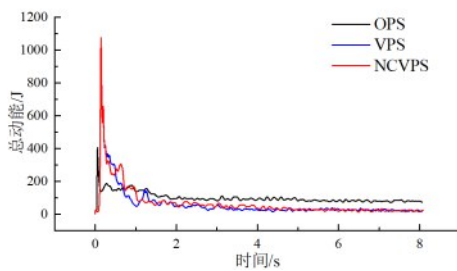


图6 不同粒子迁移方法在静水算例中总动能衰减曲线对比

Fig. 6 Comparison of total kinetic energy decay curves for different particle shifting methods in hydrostatic cases

对于具有自由面大变形的动态计算来说, NCVPS和VPS相比于OPS, 有助于在多相流求解时提高计算的稳定性。图7为两相溃坝算例, 在使用修正矩阵的情况下, 采用不同粒子迁移方法计算到时间0.4 s的粒子分布情况。由于修正矩阵方法对粒子分布十分敏感, 因此不采用(Non)的情况下, 计算迅速发散。仅仅对内部粒子使用PS的情

况下, 虽然能保证计算稳定进行, 但是可以观察到不平滑的自由表面。使用OPS的结果则可以改善自由表面。使用VPS方法的结果和OPS类似, 存在和OPS类似的自由表面粒子重叠现象。在使用NCVPS的情况, 自由表面平滑且没有粒子重叠。

在此基础上, NCVPS还有计算量较小的优势, 如图8所示, 我们测试了在1000个粒子上执行10000次不同PS方法的用时, VPS和NCVPS相比于传统OPS减少了84.6%至86.8%的计算时长, 获得了6倍以上的效率提升。

无论何种PS方法, 都可以帮助MPS方法维持稳定计算。我们对不同PS方法进行了对比, 如表3所示, 三种方法从原理上是完全不同的, 其所利用到的拓扑关系或支持域也较大区别, 综上所述, VPS和NCVPS相比于传统PS方法具有更小支持域和更好的计算效率的优势。

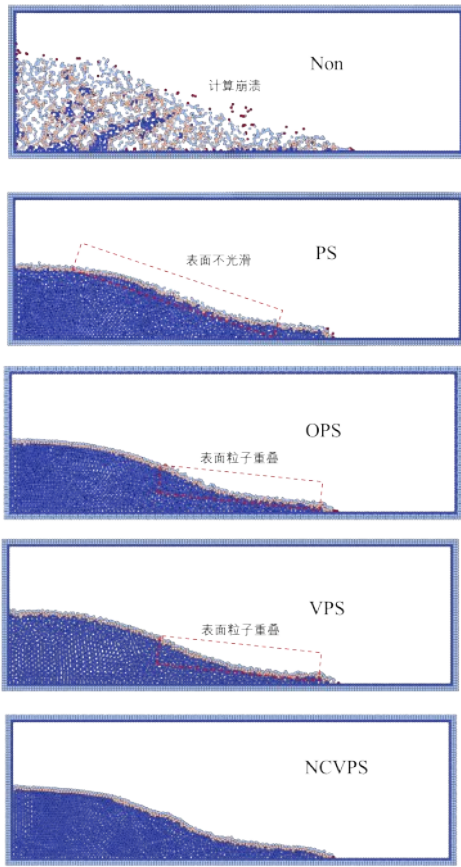


图7 不同粒子迁移方法在溃坝算例中对比

Fig. 7 The comparisons of different particle shifting methods in the dam break case

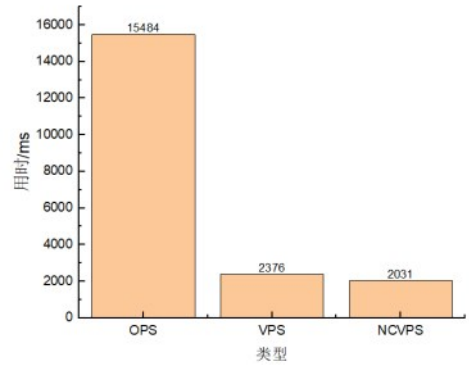


图8 不同粒子迁移方法计算效率对比
Fig. 8 Comparison of computational efficiency for different particle shifting methods

4 结论

本文将 Voronoi 图引入到移动粒子半隐式法中,。通过数值实验,可以得到以下结论:

(1) 构造了 Voronoi 图后进行邻居粒子搜索有较高的计算效率和并行扩展能力。

(2) 基于 Voronoi 的表面粒子具有准确性强和计算效率高的优势。

表3 不同PS方法特征对比

Table 3 characteristics comparison of different PS methods

方法	迁移量计算	支持域范围	计算量
OPS	浓度梯度	完整搜索域	两次核积分 (大)
VPS	自身形心位置差	仅自身	形心计算 (小)
NCVPS	邻居粒子位置梯度	自身和最邻近	梯度计算 (小)

(3) 基于 Voronoi 的 VPS 和 NCVPS 方法可以替代原始 PS 或 OPS 方法。在

减少系统扰动并改善表面粒子重叠现象的同时也具计算成本更低的优势。

本文的三种方法也可以用于其他粒子类方法,如SPH、DEM(离散单元法)等,来获得更好的计算稳定性和效率。

本文的三个方法从原理上可以直接推广到三维计算,但考虑到三维Voronoi图的生成计算量和稳定性问题,还需进一步研究以证明三维推广的价值。

参考文献

- [1] Lucy LB. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. *The Astronomical Journal*, 1977, 82: 1013-1024.
- [2] Gingold RA, Monaghan JJ. Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to non-spherical stars[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, 181: 375-389.
- [3] Koshizuka S, Oka Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid[J]. *Nuclear Science and Engineering*, 1996, 123(3): 421-434.
- [4] Koshizuka S, Nobe A, Oka Y. Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1998, 26(7): 751-769.
- [5] Colagrossi A, Landrini M. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *J. Comput. Phys.* 2003, 191(2): 448 - 475.
- [6] Duan GT, Yamaji A, Sakai M. An incompressible - compressible Lagrangian particle method for bubble flows with a sharp density jump and boiling phase change, *Comput. Method. Appl. Mech. Engrg.* 372 (2020) 113425.
- [7] Sun ZG, Xi G, Chen X. Mechanism Study of Deformation and Mass Transfer for Binary Droplet Collisions with Particle Method, *Phys. Fluids*. 21 (3) (2009).
- [8] Adami S, Hu XY, Adams NA. A transport-velocity formulation for smoothed particle hydrodynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 241: 292-307.
- [9] Zhang C, Hu XY, Adams NA. A generalized transport velocity formulation for smoothed particle hydrodynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, 337: 216-232.
- [10] Jandaghian M, Shakibaeinia A. An enhanced weakly-compressible MPS method for free-surface flows[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 360: 112771.
- [11] Sun YJ, Xi G, Sun ZG. A generic smoothed wall boundary in multi-resolution particle method for fluid - structure interaction problem[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 378: 113726.
- [12] Sun YJ, Xi G, Sun ZG. A fully Lagrangian method for fluid - structure interaction problems with deformable floating structure[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2019, 90: 379-395.
- [13] 张帅, 解利军, 郑耀. 基于移动粒子半隐式法的表面张力模拟[J]. *计算力学学报*, 2011(03): 345-349.
Zhang S, Xie LJ, Zheng Y. Simulation of surface tension force using moving particle semi-implicit method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, 28(3): 345-349.
- [14] Gou W, Zhang S, Zheng Y. Implementa-

- tion of the moving particle semi-implicit method for free-surface flows on GPU clusters[J]. *Computer Physics Communications*, 2019, 244: 13-24.
- [15] Khayyer A, Gotoh H. Enhancement of stability and accuracy of the moving particle semi-implicit method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(8): 3093-3118.
- [16] D. J. Muñoz, V. Springel, R. Marcus, M. Vogelsberger, L. Hernquist, Multidimensional, Compressible Viscous Flow on a Moving Voronoi Mesh, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2013, 428 (1) : 254 – 279.
- [17] Gaburro E, A unified framework for the solution of hyperbolic PDE systems using high order direct Arbitrary-Lagrangian – Eulerian schemes on moving unstructured meshes with topology change, *Arch. Comput. Method E.* 2021, 28(3) : 1249 – 1321.
- [18] Chartrand C, Perot JB, A Method for Generating Moving, Orthogonal, Area Preserving Polygonal Meshes, *J. Comput. Phys.* 454 (2022) 110940.
- [19] Zhou J X, Wen J B, Zhang H Y, et al. A nodal integration and post-processing technique based on Voronoi diagram for Galerkin meshless methods[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(35/36): 3831-3843.
- [20] Fu L, Hu X Y, Adams N A. A physics-motivated Centroidal Voronoi Particle domain decomposition method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, 335: 718-735.
- [21] Egorova M S, Dyachkov S A, Parshikov A N, et al. Parallel SPH modeling using dynamic domain decomposition and load balancing displacement of Voronoi subdomains[J]. *Computer Physics Communications*, 2019, 234: 112-125.
- [22] Ji Z, Fu L, Hu X Y, et al. A Lagrangian Inertial Centroidal Voronoi Particle method for dynamic load balancing in particle-based simulations[J]. *Computer Physics Communications*, 2019, 239: 53-63.
- [23] Hess S, Springel V. Particle hydrodynamics with tessellation techniques[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2010, 406(4): 2289-2311.
- [24] Fernández-Gutiérrez D, Souto-Iglesias A, Zohdi T I. A hybrid Lagrangian Voronoi – SPH scheme[J]. *Computational Particle Mechanics*, 2018, 5(3): 345-354.
- [25] Fernández-Gutiérrez D, Zohdi T I. Delta Voronoi smoothed particle hydrodynamics, δ -VSPH[J]. *Journal of Computational Physics*, 2020, 401: 109000.
- [26] Zhou Z, Han P, Sun Y, Sun Z, Xi G, Incompressible-compressible moving particle and moving Voronoi mesh method for multiphase flow, *Journal of Computational Physics*, Volume 537, 2025, 114062.
- [27] Fortune S, A sweepline algorithm for Voronoi diagrams, *Algorithmica.* 2 (1987) 153 – 174.
- [28] Han PD, Liu QX, Zhang K, et al. Enhanced Dirichlet boundary condition in MPS method for free-surface flow with negative pressure[J]. *Computers & Fluids*, 2023, 256:105820.
- [29] 韩沛东, 刘启新, 周子棋等. 负压梯度下自由面流动模拟的无网格粒子法 Dirichlet 边界条件 [J]. *西安交通大学学报*, 2022, 56(8): 141-148.
- [30] Han PD, Liu QX, Zhou ZQ et al. Dirichlet boundary conditions in meshless particle methods for free surface flow Simulation

- under negative pressure gradient[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2022, 56(8): 141-148.
- [31] Shibata K, Masaie I, Kondo M, et al. Improved pressure calculation for the moving particle semi-implicit method[J]. Computational Particle Mechanics, 2015, 2(1): 91-108.
- [32] 张凯, 孙中国, 席光. 移动粒子半隐式法核函数特征对压力求解稳定性的影响[J]. 西安交通大学学报, 2019, 53(9): 1-6. Zhang K, Sun ZG, Xi G. Influence of the kernel function characteristics on the stability of pressure solution of moving particle semi-implicit method[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2019, 53(9): 1-6.
- [33] Lloyd S. Least square quantization in PCM, IEEE Trans. Inform. Theory. 1982, 28 :) 129 - 137.
- [34] Wu G Q, Tian H Y, Lu G, et al. ParVoro++: A scalable parallel algorithm for constructing 3D Voronoi tessellations based on kd-tree decomposition[J]. Parallel Computing, 2023, 115: 102995.